2017年度入学試験問題

情報科学部公募推薦入学試験

数　　学　(90分)

〈**注意事項**〉

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。また、解答用紙には解答だけを記述するのではなく、解答に至る途中の計算も明記しなさい。
3. 問題文は2ページから6ページまでです。

[I]

n を自然数とするとき、n の正の約数すべての和を $\sigma(n)$ と定義する。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 10 の正の約数すべての和 $\sigma(10)$ の値を求めよ。

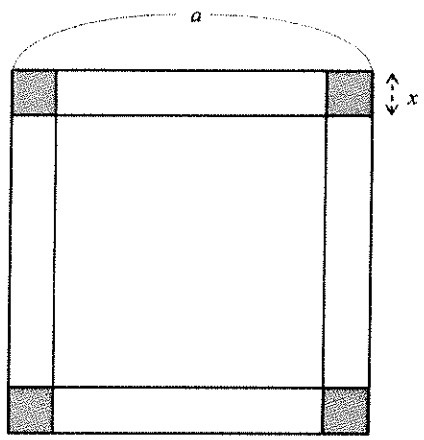
(2) 1024 の正の約数すべての和 $\sigma(1024)$ の値を求めよ。

(3) p を素数、k を 0 以上の整数としたとき、$\sigma(p^k)$ を p と k の式で表せ。

[II]

a を正の定数とする。下の図に示すように 1 辺の長さ a cm の正方形の厚紙の四方の角から合同な正方形を切り取って、その残りでふたのない直方体の箱を作る。箱の容積を $V\mathrm{cm}^3$ とする。切り取る正方形の 1 辺の長さを x cm とする。ただし、$0 < x < \dfrac{a}{2}$ である。

このとき以下の問いに答えよ。



(1)　V を x の関数として表せ。

(2)　$0 < x < \dfrac{a}{2}$ の範囲で V の増減表を作成し、V の最大値とそのときの x の値を求めよ。

[III]

以下の問いに答えよ。

(1)　座標空間上の 3 点 A$(0,0,1)$、B$(1,0,2)$、C$(0,1,3)$ を頂点とする △ABC の面積を求めよ。

(2)　a が 1 でない正の定数であるとき、次の極限値を求めよ。

$$\lim_{x\to 0}\left\{\log_a\left(\frac{a^3}{x}-\sin x\right)-\log_a\left(\frac{a}{x}+1\right)\right\}$$

(3)　関数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x+1$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ のグラフをかけ。
(グラフは解答用紙の所定の欄にかくこと。)

[IV]

a を実数とする。このとき以下の問いに答えよ。

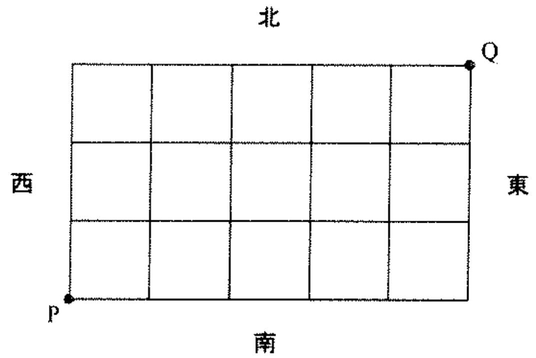
(1)　座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(a,a)$、$\mathrm{P}(X,Y)$ を結ぶ線分 AP を $1:2$ に外分する点 $\mathrm{Q}(x,y)$ の座標を X、Y、a を用いて表せ。

(2)　点 P が 2 次曲線 $y=-x^2+2$ 上を動くとき、点 Q の軌跡を求めよ。

(3)　(2) で求めた点 Q の軌跡と 2 次曲線 $y=-x^2+2$ の交点の個数を求めよ。

[V]

下の図のように、ある街には南北に走る道が6本、東西に走る道が4本ある。Pから Q まで最短経路の道順で進むこととする。その際、1枚の硬貨を投げて、表が出たら東へ1区画、裏が出たら北へ1区画進む。硬貨の表と裏が出る確率は等しく1/2である。また、Qに到達する前に、最も東の道の交差点で硬貨の表が出た場合や、最も北の道の交差点で硬貨の裏が出た場合は、先へ進めないのでその交差点にとどまる。このとき以下の問いに答えよ。



(1) 硬貨を最少回数の8回投げただけでQに到達できる確率を求めよ。

(2) 硬貨を9回投げ、ちょうど9回目にQに到達できる確率を求めよ。

(3) 硬貨を10回投げ、ちょうど10回目にQに到達できる確率を求めよ。