2020年度入学試験問題

情報科学部公募推薦入学試験

数　　学 (90分)

〈注意事項〉

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。また、解答用紙には解答だけを記述するのではなく、解答に至る途中の計算も明記しなさい。
3. 出題は高校数学の全分野にわたるので、解ける問題から取り組みなさい。
4. 問題文は2ページから7ページまでです。

[I]

以下の文は、真の命題であるか、偽の命題であるか、または、命題でないか、を答えよ。真の命題の場合は証明を、偽の命題の場合は反例を示せ。

(1) 整数 x について $4x+7$ が奇数ならば、x は偶数である。

(2) $5 \times 2 = 10$ であるか?

(3) $x^2 - 4 = 0$ である。

(4) $x^3 < x < x^2$ を満たす実数 x が存在する。

(5) $5x + 2$ に 3 をかけよ。

[II]

(1) $\dfrac{1+x}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+x}}} = -10(1+x)$ のとき、x を求めよ。

(2) x を実数、i を虚数単位とし、複素数平面上の点 α、β を次のように定める。

$$\alpha = x + 2i \text{ 、} \quad \beta = 8 + 8xi$$

α、β、原点 O が一直線上にあるときの x の値を求めよ。

(3) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき、次の方程式を解け。

$$2\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$$

[III]

赤い袋には赤玉 4 個、白い袋には白玉 4 個が入っている。最初に、赤い袋から玉を 2 個取り出し、白い袋に入れる。次に、白い袋から 2 個取り出し、赤い袋に入れる．この操作を 1 回目の操作とする。2 回目も同様に赤い袋から玉を 2 個取り出し、白い袋に入れ、白い袋から 2 個取り出して赤い袋に入れる。

(1)　1 回目の操作の後の赤い袋の中の赤玉の個数が 2 個である確率、3 個である確率、4 個である確率をそれぞれ求めよ。

(2)　2 回目の操作の後の赤い袋の中の赤玉の個数が 0 個である確率、1 個である確率をそれぞれ求めよ。

(3)　2 回目の操作の後の赤い袋の中の赤玉の個数が 4 個であるとわかっているとき、1 回目の操作の後の赤い袋の中の赤玉の個数が 2 個である確率、3 個である確率、4 個である確率を求めよ。

[IV]

関数 $y=\sqrt{2-2x}-1$ のグラフを考える。

(1) この関数のグラフをかけ。

この関数のグラフと以下の位置関係にあるグラフをかけ。また、それぞれについてグラフの関数を表す式を書け。

(2) x 軸に関して対称

(3) y 軸に関して対称

(4) 原点に関して対称

(5) x 軸方向に 1 平行移動して、y 軸に関して対称

(6) $y=x$ に関して対称

[V]

原始関数を求めずに定積分を計算する方法に関して、3 次多項式 $f(x)$ の定積分 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ についての以下の問に答えよ。

(1) $\int_{-1}^{1} g(x)dx = 0$ かつ $\int_{-1}^{1} xg(x)dx = 0$ を満たし、最高次数の係数が 1 である 2 次多項式 $g(x)$ を求めよ。

(2) $g(\frac{1}{\sqrt{3}}), g(\frac{-1}{\sqrt{3}})$ を計算せよ。

(3) 定数 a, b, c, d を $f(x) = (ax+b)g(x) + (cx+d)$ となるようにとる。このとき $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ を $f(\frac{1}{\sqrt{3}}), f(\frac{-1}{\sqrt{3}})$ を用いて表わせ。

(4) (3) の考え方を用いて原始関数を求めずに $h(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ の定積分 $\int_{-1}^{1} h(x)dx$ を求める計算手順を示せ。

(5) $\int_{-1}^{1} h(x)dx$ を、通常の原始関数を求めて計算する方法で計算し、(4) の結果と比較せよ。

(6)

$$\int_{-1}^{1} \left\{ (\sqrt{3}x+1)(3\sqrt{3}x-\sqrt{7})(\sqrt{11}x+2) + (\sqrt{3}x-1)(3\sqrt{3}x+\sqrt{7})(\sqrt{11}x+2) \right\} dx$$

を求めよ。

[VI]

関数 $f(x)$ を $f(x)=4-|2x|$ とする。$-2 \leqq a < 0$、$0 \leqq b < 2$ を満たす実数 a、b に対して、xy 平面上の 4 点 $\mathrm{A}(a,0)$、$\mathrm{B}(a,f(a))$、$\mathrm{C}(b,f(b))$、$\mathrm{D}(b,0)$ で囲まれる四角形 ABCD を考える。

(1) $a=-1$ としたとき、四角形 ABCD の面積が $\dfrac{15}{4}$ 以上となる b の範囲を求めよ。

(2) $t=b-a$ とおく。四角形 ABCD の面積 s を t を用いて表せ。また、s の最大値を求めよ。