

2018年度入学試験問題
情報科学部公募推薦入学試験
数 学 (90分)

〈注意事項〉

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入下さい。また、解答用紙には解答だけを記述するのではなく、解答に至る途中の計算も明記下さい。
3. 出題は高校数学の全分野にわたるので、解ける問題から取り組み下さい。
4. 問題文は2ページから8ページまでです。

[I] 以下の問いに答えなさい。

(1) 2^{128} は 10 進法で何桁の数になるか。 $\log_{10} 2 = 0.3010$ として計算せよ。

(2) θ が鋭角のとき,

(i) $\sin \theta = \frac{3}{4}$ のとき, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ。

(ii) $\tan \theta = 3$ のとき, $\sin \theta$, $\cos \theta$ の値を求めよ。

(3) 方程式 $x^6 = 1$ の解を複素数の範囲ですべて求めよ。

[II]

座標平面上の2点 $A(-3, 0)$ 、 $B(3, 0)$ がある。以下の問いに答えよ。

- (1) 線分 AB を $1:2$ に内分する点、および $1:2$ に外分する点の座標をそれぞれ求めよ。
- (2) $PA:PB=1:2$ となる動点 $P(x, y)$ の軌跡を求めよ。また、この軌跡がどのような図形であるか説明せよ。

[III]

中心が O 、半径が r の円 O と、円 O の弦 AB を考える。弦 AB と円の中心 O の距離を x とおく。円 O 上の点 P を三角形 PAB の面積が最大になるようにとる。

- (1) 三角形 PAB の面積は r と x によって決まる。以後、 r を定数とし、三角形 PAB の面積を x の関数 $S(x)$ と考える。 $S(x)$ を r と x の式で表せ。
- (2) $S(x)$ の導関数 $S'(x)$ を計算し、 $S(x)$ の $0 < x < r$ における増減表をつくり、 $S(x)$ が最大になるときの x の値と最大値を求めよ。
- (3) (2)の結果より、 $S(x)$ が最大になるとき三角形 PAB はどのような三角形になるか。

[IV]

関数 $f(x) = |x^2 - x - 2| - x$ について考える。

- (1) $y = f(x)$ のグラフを描け。
- (2) 関数 $f(x)$ の $-2 \leq x \leq 4$ における最大値と最小値を求めよ。
- (3) $\lim_{x \rightarrow 2-0} f'(x)$ および $\lim_{x \rightarrow 2+0} f'(x)$ を計算せよ。

[V]

平面上に置かれた正六角形を考える。その6つの頂点から3つを選び、それらを頂点としてできる三角形について以下の問いに答えよ。どのように考えたか、その過程も示せ。

- (1) このような三角形は全部で何個あるか。
- (2) そのうち、直角三角形は何個あるか。また、正三角形は何個あるか。
- (3) 正六角形の中心の周りに平面内で回転して重なるものを仲間として組をつくと全部で何組できるか。
- (4) (3)に加えて適当な直線に関する対称な変換(裏返し)で重なるものも仲間として考えると全部で何組できるか。

[VI]

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ($n \geq 3$) と定める。 $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ とする。

- (1) $a_1 > \alpha$ および $a_2 > \alpha^2$ を示せ。
- (2) α が解となるような整数係数の 2 次方程式を求めよ。
- (3) すべての整数 $n \geq 1$ について $a_n > \alpha^n$ が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ。

[VII]

$f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos(x - a)$ とおく。ここで a は $0 < a < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。

- (1) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフの概形を $-\pi \leq x \leq \pi$ の範囲で1つの図内に描け。
- (2) $0 \leq x \leq \pi$ かつ $y \leq f(x)$ かつ $y \leq g(x)$ かつ $y \geq 0$ をみたす領域の面積を求めよ。
- (3) $0 \leq x \leq \pi$ において $y = f(x)$ のグラフと x 軸とで囲まれる部分の面積が $y = g(x)$ のグラフによって2等分されるときの a の値を求めよ。