

2019年度入学試験問題
情報科学部公募推薦入学試験
数 学 (90分)

〈注意事項〉

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答はすべて解答用紙に記入しなさい。また、解答用紙には解答だけを記述するのではなく、解答に至る途中の計算も明記しなさい。
3. 出題は高校数学の全分野にわたるので、解ける問題から組みこなさい。
4. 問題文は2ページから7ページまでです。

[I]

次のように定義される数列 $\{a_n\}$ について、次の間に答えよ。

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$$

- (1) a_n を a_1, a_2, \dots と次々に計算することにより、一般項 a_n を表す n の式を推定せよ。
- (2) (1) の推定が正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。

[II]

ベクトル \vec{a} 、 \vec{b} について、 $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$ 、 $|\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{7}$ 、 $|\vec{a}| - |\vec{b}| = 2\sqrt{6}$ とする。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。
- (2) \vec{a} 、 \vec{b} のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) を求めよ。

[III]

4つの頂点が $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$ である正方形 P と $(t, 0), (0, t), (-t, 0), (0, -t)$ である正方形 Q がある。 $t \geq 0$ のとき、 P と Q の共通部分の面積を $S(t)$ と表し、そのグラフを書け。

また $0 \leq t \leq 3$ の範囲で t 軸と $S(t)$ のグラフで囲まれる範囲の面積 S を求めよ。

[IV]

関数 $y = -x \log_2 x - (1-x) \log_2(1-x)$ ($0 < x < 1$) のグラフを描け。

[V]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \sin \frac{n}{4}\pi - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{n+1} \left(\sin \frac{n}{4}\pi + \cos \frac{n}{4}\pi \right) \right\}$$

を求めよ。

[VI]

複素数平面において中心 α ($|\alpha| \neq r$)、半径 $r > 0$ の円は、

$$(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = r^2 \quad (1)$$

で表わせる。複素数 z と複素数 w の関係を $w = 1/z$ とする。 w はどのような図形になるか? (ヒント: 1 に $z = 1/w$ を代入せよ)